BÀI TẬP VỀ DÃY SỐ-CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

I. DÃY SỐ

1. viết số hạng tổng quát của dãy số tự nhiên , mà mỗi số hạng của nó khi chia cho 3 còn dư 2 .

2. Dãy số u_n được xác định bằng công thức quy nạp : $u_1 = 3, u_{n+1} = 2u_n$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số đó và tích 4 số hạng đầu của dãy số .

3. Tìm số hạng tổng quát của dãy số xác định bằng công thức quy nạp :

a. $u_1 = 3, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$

b. $u_1 = a, u_{n+1} = a + bu_n$ (Với a,b là hằng số)

4. Các dãy số sau có đơn điệu không ?

a. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ b. $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ c. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

5. Với giá trị nào của a,b ,dãy số : $u_n = \frac{an+2}{bn+1}$ là một dãy số không giảm ,tăng?giảm?

6. Trong các dãy số sau , dãy số nào bị chặn ? Bị chặn trên hay bị chặn dưới ?

a. $u_n = 2n - 1$ b. $u_n = \frac{1}{n^2}$ c. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

d. $u_n = 3.2^{n-1}$ e. $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

7. Cho dãy số : $u_n = \frac{n-1}{n}; v_n = \frac{n+2}{n}$. Tính : $(u_n \pm v_n); (u_n.v_n); \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

II. CẤP SỐ CỘNG .

1. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng . Tìm ba góc đó ?

2. Chứng minh tam giác ABC có ba góc với : $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thì ba cạnh theo thứ tự đó cũng tạo thành một cấp số cộng ?

3. Số hạng thứ 2 và số hạng thứ 7 của một cấp số cộng có tổng bằng 92, số hạng thứ tư và số hạng thứ 11 có tổng bằng 71 . Tìm 4 số hạng đó ?

4. Một cấp số cộng có 11 số hạng . Tổng các số hạng đó bằng 176 . Hiệu số hạng cuối và số hạng đầu là 30 . Tìm cấp số đó ?

5. Bốn số hạng lập thành một cấp số cộng . Tổng của chúng bằng 22. Tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm 4 số đó ?

6. Năm số lập thành một cấp số cộng . Biết tổng S , tích P của chúng . Tìm năm số đó

7. Bốn số nguyên lập thành một cấp số cộng . Tổng của chúng bằng 20, tổng các ngịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó ?

8. Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau : hàng thứ nhất có 1 cây , hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây , v.v...Hỏi có bao nhiêu hàng ?

9. Xác định cấp số cộng sao cho tổng n số hạng đầu bằng n+1 lần một nửa số hạng thứ n

III. CẤP SỐ NHÂN

1. Một cấp số nhân có số hạng thứ nhất $u_1 = 2$, công bội q bằng 3, và 5 số hạng . Tìm số hạng cuối cùng và tổng của 5 số hạng đó ?

2. Trong một cấp số nhân có 9 số hạng , biết số hạng đầu $u_1 = 5$ và số hạng cuối $u_9 = 1280$. Tìm công bội q và tổng S các số hạng ?

3. Tìm số hạng của một cấp số nhân :

a. Có 5 số hạng mà số hạng đầu là 3 , số hạng cuối là 243 ?

b. Có 6 số hạng mà số hạng đầu là 243 và số hạng cuối là 1 ?

c. Trong cấp số nhân , cho q=1/4 , n=6, và S=2730 . Tìm u_1, u_6.

4. Tìm bốn góc của một tứ giác , biết các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối bằng 9 lần góc thứ 2 ?

5. Tổng ba số hạng của một cấp số nhân là 248 , hiệu của số hạng cuối và số hạng đầu là 192. Tìm ba số hạng đó ?

6. Chứng minh rằng nếu ba cạnh của một tam giác lập thành một cấp số nhân thì công bội của cấp số đó ắt phải nằm giữa $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ và $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

7. Tính tổng các cạnh của một hình hộp chữ nhật , biết rằng thể tích của chúng bằng a^3, diện tích toàn phần của nó bằng $2ma^2$ và các cạnh lập thành một cấp số nhân ?

IV. BÀI TẬP TỔNG HỢP

1. Giả sử $x_1, x_2, ... x_n \in R_+ \vee x_1.x_2....x_n = 1$. Chứng minh $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$

2. Chứng minh : $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ với : $a \geq 0, b \geq 0, n \in N^*$

3. Xét tính bị chặn và tính đơn điệu của các dãy số sau ?

a. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$ b. $u_n = (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

4. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là 1,8,22,43,...... Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng : 7,14,21..., 7n. số 35351 là số hạng thứ mấy của cấp số đã cho ?

5. Cho phương trình : $x^4 + 3x^2 - (24+m)x - 26 - n = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa m và n để 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng ?

6. Tìm m để phương trình : $x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành một cấp số cộng ?

7. Độ dài các cạnh của một tam giác ABC lập thành một cấp số nhân . Chứng minh rằng tam giác ABC có hai góc không quá 60^0?

8. Tìm bốn số hạng đầu của một cấp số nhân , biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự , chúng là số hạng thứ nhất , thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng .

9. Một cấp số nhân có 5 số hạng , công bội q =1/4 số hạng thứ nhất , tổng của hai số hạng đầu bằng 24 . Tìm cấp số nhân đó ?

10. Xen vào giữa hai số : 4 và 40 bốn số để dược một cấp số cộng ? Tìm bốn số đó ?

11. Tính tổng :

$$S=\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+...+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$$

12. Với giá trị nào của a , ta có thể tìm được các giá trị của x để các số :

$5^{x+1}+5^{1-x},\frac{a}{2},25^{x}+25^{-x}$ lập thành một cấp số cộng ?

13. Chứng minh rằng dãy số : $a_n=2.3^n$ lập thành một cấp số nhân và tính tổng của 8 số hạng đầu tiên của nó ?

14. Giả sử a,b,c,d lập thành một cấp số nhân . Hãy tính giá trị biểu thức :

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$$

15. Giả sử các số : 5x-y,2x+3y, và x+2y lập thành một cấp số cộng , còn các số : $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân . Tìm x,y ?

16. Cho một cấp số cộng : u_1,u_2,u_3,u_4. Chứng minh rằng nếu : $|u_1u_4-u_2u_3|\le 6$ thì biểu thức A= $\sqrt{(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)+9}$ có nghĩa với mọi x ?

17. Chứng minh rằng : Nếu $0<N\ne 1$ thì điều kiện ắt có và đủ để ba số dương a,b,c tạo thành một cấp số nhân (theo thứ tự đó) là :

$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}\quad (a,b,c\ne 1)$$

18. Chứng minh rằng , nếu $\log_x a,\log_y b,\log_z c$ tạo thành một cấp số cộng (theo thứ tự đó) thì : $\log_b y=\frac{2\log_a x\log_c z}{\log_a x+\log_c z}(0<x,y,z,a,b,c\ne 1)$.

19. Cho ba số : x,3,y lập thành một cấp số nhân và $x^4=y\sqrt{3}$. Tìm x,y và công bội q của cấp số đó ?

20.Cho ba số tạo thành một cấp số nhân mà tổng của chúng bằng 93. Ta có thể sắp đặt chúng (theo thứ tự của cấp số nhân kể trên) như là số hạng thứ nhất , thứ hai và thứ bẩy của một cấp số cộng . Tìm ba số đó ?

21.a. Tính tổng của n số hạng : $3+33+333+...$

b. Tìm x để ba số : $\ln 2,\ln(2^x-1),\ln(2^x+3)$ lập thành một cấp số cộng ?

22. Tìm bốn số biết rằng ba số hạng đầu lập thành một cấp số nhân , ba số hạng sau lập thành một cấp số cộng . Tổng của hai số hạng đầu và cuối bằng 14, còn tổng của hai số ở giữa là 12 ?

23. Tổng của số hạng thứ hai và thứ tư của một cấp số nhân tăng nghiêm ngặt là 30 , và tích của chúng bằng 144. Tìm tổng mười số hạng đầu tiên của dãy số đó ?

24. Cho tam giác ABC có $A=90^0$ còn a,b,$\frac{\sqrt{6}}{3}$,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân . Tam giác ABC là tam giác có đặc điểm gì ?

25. Cho tam giác ABC, có ba cạnh a,b,c , theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng . Hãy chứng minh rằng : $\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}=3$.

26. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện : tagA.tangB=6 và tangA.tangC=3 . Hãy chứng tỏ : tangA,tgB,tgC theo thứ tự dó lập thành cấp số cộng ?

27. Tam giác ABC có : $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng . Hãy chứng minh rằng ba cạnh a,b,c theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng ?

28. Tam giác ABC có : $\cot A, \cot B, \cot C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp cộng . Hãy chứng minh rằng : a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng ?

29. Cho tam giác ABC cân (AB=AC), có cạnh đáy BC , đường cao AH , cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân . Hãy tính công bội q của cấp số nhân đó ?

30. Tam giác ABC có các cạnh a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng . Hãy chứng minh rằng khi đó công sai của cấp số cộng được tính bởi công thức :

$$d = \frac{3}{2} r\left(tg\frac{C}{2} - tg\frac{A}{2} \right)$$

V. HƯỚNG DẪN GIẢI PHẦN BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1 : Giả sử $x_1, x_2, ...x_n \in R_+ \vee x_1.x_2....x_n = 1$. Chứng minh $x_1 + x_2 + ... + x_n \ge n$

Giải .

Chứng minh bằng quy nạp .

- Với n=1 : $x_1 = 1$. Mệnh đề đúng .
- Giả sử mệnh đề đúng với n=k (k>1).

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \ge k \quad \vee x_1x_2x_3..x_k = 1 \quad (*)$$

Nếu với mọi $x_k = 1$ thì hiển nhiên : $x_1 + x_2 + .. + x_k + x_{k+1} \ge k + 1$.

Nếu trong k+1 số có ít nhất một số lớn hơn 1 , thì ắt phải có số nhỏ hơn 1.

Không giảm tính tổng quát , giả sử $x_k > 1$và $x_{k+1} < 1$, khi đó ta có :

$$(1 - x_{k+1})(x_k - 1) > 0 \Leftrightarrow x_k + x_{k+1} > 1 + x_kx_{k+1} \quad (1)$$

Do đó :

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} > x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_kx_{k+1} + 1 \quad (2)$$

Theo giả thiết quy nạp , ta suy ra từ k số ở vế phải :

$$x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + (x_kx_{k+1}) \ge k \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} > k + 1$.

Bài 2. Chứng minh : $\frac{a^n + b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ với : $a \ge 0, b \ge 0, n \in N^*$

HƯỚNG DẪN

- Với n=1 . Mệnh đề đúng
- Giả sử mệnh đề đúng với n=k (Với k>1) : $\Leftrightarrow \frac{a^k + b^k}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \quad (1)$
- Ta phải chứng minh : $\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$

Thật vậy , ta nhân hai vế của (1) với $\frac{a+b}{2}$, ta có :

$$\Leftrightarrow \frac{a^k + b^k}{2}.\frac{a+b}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^k.\frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + a^kb + ab^k + b^{k+1}}{4} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \quad (2)$$

Nhưng với a>0,b>0 thì : $\left(a^k-b^k\right)(a-b)\geq 0 \Leftrightarrow a^{k+1}+b^{k+1}\geq a^kb+ab^k$

Cho nên : $$\frac{a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1}}{4}\leq\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \quad (3)$$

So sánh (2) và (3) ta được điều phải chứng minh .

Bài 3.Xét tính bị chặn và tính đơn điệu của các dãy số sau ?

a. $u_n=\frac{n^2+1}{n}$ b. $u_n=(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

HƯỚNG DẪN

a. $u_n=\frac{n^2+1}{n}=n+\frac{1}{n}$. Ta thấy : $u_n=\frac{n^2+1}{n}\geq\frac{2\sqrt{n^2.1}}{n}=2$. Cho nên đây là một dãy số tăng , bị chặn dưới bởi m=2 . (Nhưng không bị chặn).

b. $u_n=(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

- Xét hiệu : $u_{n+1}-u_n=(-1)^n\left[\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n}\right]$. Vì biểu thức trong dấu móc luôn dương với mọi thuộc N^*.cho nên $u_{n+1}-u_n>0$, khi n chẵn , còn $u_{n+1}-u_n<0$ khi n là lẻ . Vì vậy dãy số đã cho không tăng và cũng không giảm (Không đơn điệu).

Mặt khác : $-1\leq\sin\frac{1}{n}\leq 1\Rightarrow -1(-1)^{n-1}\leq u_n\leq 1(-1)^{n-1}\Leftrightarrow(-1)^n\leq u_n\leq -1^n$

Có nghĩa là : $u_n\in[1;1]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M=1\\ m=1\end{array}\right.$. Dãy số bị chặn .

Bài 4. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là 1,8,22,43,...... Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng : 7,14,21..., 7n. số 35351 là số hạng thứ mấy của cấp số đã cho ?

HƯỚNG DẪN

Theo đầu bài ta có :

$$\begin{cases}u_2-u_1=7\\ u_3-u_2=14\\ u_4-u_3=21\\ \dots\dots\dots\dots\\ u_n-u_{n-1}=7(n-1)\end{cases}$$

Cộng các vế của các phương trình của hệ ta được :

$\Leftrightarrow u_n-u_1=7+14+21+...+7(n-1)=7\frac{n(n-1)}{2} \quad (1)$

Đặt : $u_n=35351\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 35351-1=7\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow n^2-n-10100=0\rightarrow n=101$.

Do đó : 35351 là số hạng thứ 101 của dãy sô .

Bài 5. Cho phương trình : $x^4+3x^2-(24+m)x-26-n=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa m và n để 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

Vì 3 nghiệm phân biệt : x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng , nên ta có thể đặt :

$x_1 = x_0 - d, x_2 = x_0, x_3 = x_0 + d\,(d \neq 0)$. Theo giả thiết ta có :

$x^3 + 3x^2 - (24+m)x - 26 - n = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_0 + d)(x - x_0)(x - x_0 - d)$

$= x^3 - 3x_0x^2 + (3x_0^2 - d^2)x - x_0^3 + x_0d^2 \quad (\forall x)$

Đồng nhất hệ số ở hai vế của phương trình ta có hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0 = 3 \\ 3x_0^2 - d^2 = -(24+m) \\ -x_0^3 + x_0d^2 = -26 - n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ 3 - d^2 = -24 - m \\ 1 - d^2 = -26 - n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ m = n \end{cases}$$

Vậy với m=n thì ba nghiệm phân biệt của phương trình lập thành cấp số cộng .

Bài 6.Tìm m để phương trình : $x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành một cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

Giả sử bốn nghiệm phân biệt của phương trình : x_1, x_2, x_3, x_4.

Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta được phương trình :

$\Leftrightarrow y^2 - (3m+5)y + (m+1)^2 = 0 \quad (1)$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm dương phân biệt : $0 < y_1 < y_2$, Khi đó thì (1) có bốn nghiệm là : $x_1 = -\sqrt{y_2}, x_2 = -\sqrt{y_1}, x_3 = \sqrt{y_1}, x_4 = \sqrt{y_2}$ (Rõ ràng : $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$)

Theo đầu bài thì bốn nghiệm lập thành cấp số cộng , nên :

$$\Rightarrow x_3 + x_1 = 2x_2 \vee x_4 + x_2 = 2x_3 \Leftrightarrow \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = 2\sqrt{y_1} \Rightarrow 3\sqrt{y_1} = \sqrt{y_2} \Leftrightarrow 9y_1 = y_2\,(*)$$

Áp dụng vi ét cho phương trình (1) ta có hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+5)^2 - 4(m+1)^2 > 0 \\ S = y_1 + y_2 = 10y_1 = 3m+5 \\ P = y_1y_2 = 9y_1^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -\dfrac{25}{19} \end{cases}$$

Bài 7. Độ dài các cạnh của một tam giác ABC lập thành một cấp số nhân . Chứng minh rằng tam giác ABC có hai góc không quá 60^0?

HƯỚNG DẪN

Giả sử ba cạnh của tam giác ABC thứ tự là a,b,c . Không giảm tính tổng quát , ta giả sử 0<a$\leq b \leq c$, nếu chúng tạo thành cấp số nhân thì , theo tính chất của cấp số nhân ta có : $b^2 = ac.$

Theo định lý hàm số cô sin , ta có :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2}{2ac} - \frac{1}{2}$$

Mặt khác : $a^2 + c^2 \geq 2ac \Rightarrow \cos B \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy góc $B \leq 60^0$

Nhưng : $a \leq b \Rightarrow A \leq 60^0$, cho nên tam giác ABC có hai góc không quá 60^0.

Bài 8.Tìm bốn số hạng đầu của một cấp số nhân , biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự , chúng là số hạng thứ nhất , thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng .

HƯỚNG DẪN

Gọi : u_1,u_2,u_3,u_4 là 4 số hạng đầu tiên của cấp số nhân , với công bội q . Gọi (v_n) là cấp số cộng tương ứng với công sai là d . Theo giả thiết ta có :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=16\frac{4}{9} \\ u_1=v_1 \\ u_2=v_4=v_1+3d \\ u_3=v_8=v_1+7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=16\frac{4}{9}\,(1) \\ u_1q=u_1+3d \quad (2) \\ u_1q^2=u_1+7d\ (3) \end{cases}$$

Khử d từ (2) và (3) ta được : $u_1\left(3q^2-7q+4\right)=0 \quad (4)$.

Do (1) nên : $u_1\neq 0 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=\frac{4}{3} \end{array}\right.$. Theo định nghĩa thì $q\neq 1$, do vậy $q=\frac{4}{3}$

Thay vào (1) , ta được : $u_1=4,u_2=u_1q=\frac{16}{3},u_3=\frac{64}{9},u_4=\frac{256}{27}$

Bài 9. Một cấp số nhân có 5 số hạng , công bội q =1/4 số hạng thứ nhất , tổng của hai số hạng đầu bằng 24 . Tìm cấp số nhân đó ?

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết ta có :$u_1+u_2=u_1+\frac{1}{4}(u_1)=24 \Rightarrow u_1+\frac{1}{4}u_1^2-24=0 \Leftrightarrow u_1=-12 \vee u_1=8$

Vậy có hai cấp số nhân tương ứng là : 8,16,32,128 hoặc : -12,36,-108,-972

Bài 10. Xen vào giữa hai số : 4 và 40 bốn số để dược một cấp số cộng ? Tìm bốn số đó ?

HƯỚNG DẪN

Nếu xen 4 số vào giữa hai số để được một cấp số cộng thì cấp số đó có 6 số hạng .
Theo đầu bài ta có :

$$u_1=4,u_6=40 \Rightarrow 40=4+5d \Leftrightarrow d=\frac{40-4}{5}=7,2$$

Vậy 4 số thêm vào là : 4+7,2=11,2, 18,4.,25,6,32,8.

Bài 11. Tính tổng :

$$S=\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+...+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$$

HƯỚNG DẪN .

Ta có :

$$S=\left(4+2+\frac{1}{4}\right)+\left(16+2+\frac{1}{16}\right)+...+\left(2^{2n}+2+\frac{1}{2^{2n}}\right)=\left(4+16+..+2^{2n}\right)+2n+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+..+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân : $S_n=u_1\frac{q^n-1}{q-1}$:

$$S=4.\frac{4^{n-1}}{3}+2n+\frac{1}{4}.\frac{2^{\frac{1}{2n}}-1}{\frac{1}{4}-1}=4.\frac{4^n-1}{3}+2n+\frac{1}{3}.\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}=2n+\frac{4^n-1}{3}.\frac{4.4^n+1}{4^n}=2n+\frac{\left(4^n-1\right)\left(4^{n+1}+1\right)}{3.4^n}$$

Bài 12. Với giá trị nào của a , ta có thể tìm được các giá trị của x để các số : $5^{x+1}+5^{1-x},\frac{a}{2},25^x+25^{-x}$ lập thành một cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

Để 3 số hạng đó lập thành cấp số cộng , ta có :

$$\left(5^{1+x}+5^{1-x}\right)+\left(25^{x}+25^{-x}\right)=2\left(\frac{a}{2}\right)\Leftrightarrow a=5\left(5^{x}+\frac{1}{5^{x}}\right)+\left(5^{2x}+\frac{1}{5^{2x}}\right)$$

Theo bất đẳng thức cô si , ta có : $5^{x}+\frac{1}{5^{x}}\geq 2\sqrt{1}=2,5^{2x}+\frac{1}{5^{2x}}\geq 2\Rightarrow a\geq 5.2+2=12$.

Vậy với : $a\geq 12$, thì ba số đó lập thành cấp số cộng .

Bài 13. Chứng minh rằng dãy số : $a_n=2.3^n$ lập thành một cấp số nhân và tính tổng của 8 số hạng đầu tiên của nó ?

HƯỚNG DẪN

Xét : $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2.3^{n+1}}{2.3^n}=3>1$. Chứng tỏ a_n là một cấp số nhân , có công bội q=3 , $a_1=2.3=6$

Do vậy : $S_8=\frac{6\left(3^8-1\right)}{3-1}=3.\left(3^8-1\right)=17.680$.

Bài 14. Giả sử a,b,c,d lập thành một cấp số nhân . Hãy tính giá trị biểu thức :

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$$

HƯỚNG DẪN

Ta có :

A=$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2=\left(a-aq^2\right)^2+\left(aq-aq^2\right)^2+\left(aq-aq^3\right)^2-\left(a-aq^3\right)^2=0$

Bài 15. Giả sử các số : 5x-y,2x+3y, và x+2y lập thành một cấp số cộng , còn các số : $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân . Tìm x,y ?

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết ta có hệ :

$$\begin{cases}(5x-y)+(x+2y)=2(2x+3y)\\(y+1)^2(x-1)^2=(xy+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=5y\\\left[\begin{array}{l}x+y=2\\xy+x+y=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=5y\\x+y=2\end{cases}\\\begin{cases}2x=5y\\y(5y)+5y+2y=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\y=\frac{4}{3}\end{cases}\\\begin{cases}x=0,y=0\\x=-\frac{3}{4},y=-\frac{3}{10}\end{cases}\end{array}\right.$$

Bài 16. Cho một cấp số cộng : u_1,u_2,u_3,u_4. Chứng minh rằng nếu : $\left|u_1u_4-u_2u_3\right|\leq 6$ thì biểu thức A= $\sqrt{(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)+9}$ có nghĩa với mọi x ?

HƯỚNG DẪN

Theo tính chất của cấp số cộng , ta có : $u_1+u_4=u_2+u_3$

Do đó : $\Leftrightarrow(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)=\left[x^2-(u_1+u_4)x+u_1u_4\right]\left[x^2-(u_2+u_3)x+u_2u_3\right]$ (*)

Đặt : $t=x^2-(u_1+u_4)x=x^2-(u_2+u_3)x$, khi đó :

(*)$\Leftrightarrow f(t)=(t+u_1u_4)(t+u_2u_3)+9=t^2+(u_1u_4+u_2u_3)t+u_1u_4u_2u_3+9$

Với : $\Delta_t=(u_1u_4+u_1u_3)^2-4u_1u_2u_3u_4-36=(u_1u_4-u_2u_3)^2-36$.

Rõ ràng : $\left|u_1u_4-u_2u_3\right|\leq 6\Rightarrow\Delta_t<0\leftrightarrow f(t)>0\forall t\Leftrightarrow$ A có nghĩa với mọi x..

Bài 17. Chứng minh rằng : Nếu $0 < N \neq 1$ thì điều kiện ắt có và đủ để ba số dương a,b,c tạo thành một cấp số nhân (theo thứ tự đó) là :

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} \quad (a,b,c \neq 1)$$

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết , nếu ba số a,b,c lập thành cấp số nhân thì : $ac = b^2 \quad (1)$

Lấy logarit cơ số N hai vế của (1) ta có :

$\Leftrightarrow \log_N(ac) = \log_N b^2 \Leftrightarrow \log_N a + \log_N C = 2\log_N b \quad (2)$

Sử dụng công thức đổi cơ số :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_C N} = \frac{2}{\log_b N} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a N} - \frac{1}{\log_b N} = \frac{1}{\log_b N} - \frac{1}{\log_C N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_b N - \log_a N}{\log_a N.\log_b N} = \frac{\log_c N - \log_b N}{\log_c N.\log_b N} \Leftrightarrow \frac{\log_b N - \log_a N}{\log_c N - \log_b N} = \frac{\log_a N}{\log_c N} \Rightarrow \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} = \frac{\log_a N}{\log_c N}$$

Bài 18. Chứng minh rằng , nếu $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ tạo thành một cấp số cộng (theo thứ tự đó) thì : $\log_b y = \dfrac{2\log_a x \log_c z}{\log_a x + \log_c z} (0 < x,y,z,a,b,c \neq 1)$.

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết :

$$\Leftrightarrow \log_x a + \log_z c = 2\log_y b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c z} = \frac{2}{\log_b y} \Rightarrow \log_b y = \frac{2\log_a x.\log_c z}{\log_a x + \log_c z} \quad (dpcm)$$

Bài 19. Cho ba số : x,3,y lập thành một cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x,y và công bội q của cấp số đó ?

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết : $\begin{cases} xy = 3^2 \\ x^4 = y\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{9}{x} \\ x^4 = \dfrac{9\sqrt{3}.}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{9}{x} \\ x^5 = 9\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[5]{\sqrt{3^5}} \\ y = \dfrac{3^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Bài 20.Cho ba số tạo thành một cấp số nhân mà tổng của chúng bằng 93. Ta có thể sắp đặt chúng (theo thứ tự của cấp số nhân kể trên) như là số hạng thứ nhất , thứ hai và thứ bẩy của một cấp số cộng . Tìm ba số đó ?

HƯỚNG DẪN

Gọi ba số đã cho là : u_1, u_2, u_3 theo thứ tự là ba số của một cấp số cộng .

Còn cáp số nhân (v_n). Theo giả thiết ta có hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 93(*) \\ v_1 = u_1 \quad (1) \\ u_1 + d = v_1 q\,(2) \\ u_1 + 2d = v_1 q^2\,(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(1+q+q^2) = 93\,(*) \\ d = u_1(q-1) \quad (1 \vee 2)(4) \\ 6d = u_7 - u_1 = u_1(q^2-1)(2 \vee 3)(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 93(*) \\ u_1(q-1) = \dfrac{1}{6}u_1(q^2-1)(4 \vee 5)(6) \\ d = u_1(q-1) \end{cases}$$

Từ (2) và (2) cho ta phương trình (4) . Còn từ (2) và (3) cho phương trình (5) . Mặt khác từ (4) và (5) cho phương trình (6).

Do : $u_1 \neq 0, q \neq 1 \Rightarrow (6) \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{6}(q+1) \Leftrightarrow q = 5$

Theo (*) : $v_1+5v_1+25v_1=93 \Leftrightarrow u_1=3$. Vậy ba số cần tìm là : 3,15,75.

Bài 21.a. Tính tổng của n số hạng : $3+33+333+...$

b. Tìm x để ba số : $\ln 2, \ln\left(2^x-1\right), \ln\left(2^x+3\right)$ lập thành một cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

a. Tính tổng của n số hạng : S=$3+33+333+...$

Ta có : S=3(1+11+111+....+11...1 (n chữ số 1))

$$=3\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+....+\frac{10^n-1}{9}\right)=\frac{3}{9}\left(10+10^2+...+10^n-n\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(10.\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)=\frac{1}{27}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$$

b. Tìm x để ba số : $\ln 2, \ln\left(2^x-1\right), \ln\left(2^x+3\right)$ lập thành một cấp số cộng ?

Điều kiện : $2^x-1>0 \Leftrightarrow 2^x>1=2^0 \Rightarrow x>0(*)$

Khi đó ta có phương trình : $2\ln\left(2^x-1\right)=\ln 2+\ln\left(2^x+3\right) \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)^2=2\left(2^x+3\right)$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-4.2^x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=-1\\2^x=5>1\end{array}\right. \Rightarrow x=\log_2 5>0$$

Bài 22. Tìm bốn số biết rằng ba số hạng đầu lập thành một cấp số nhân , ba số hạng sau lập thành một cấp số cộng . Tổng của hai số hạng đầu và cuối bằng 14, còn tổng của hai số ở giữa là 12 ?

HƯỚNG DẪN

Gọi 4 số phải tìm là a_1,a_2,a_3,a_4. Theo đầu bài ta có hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a_2^2=a_1a_3\\2a_3=a_2+a_4\\a_1+a_4=14\\a_2+a_3=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a_1q^2=a_1q+a_2+d\ (1)\\a_1+a_2+2d=14\quad(2)\\a_1q+a_1q^2=12\quad(3)\\a_2+a_2+d=12\quad(4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_2^2=a_1\left(a_2+d\right)\quad(*)\\a_2+2d=14-a_1\\a_1=\dfrac{12}{q+q^2}\\d=12-2a_2\end{cases}$$

Giải hệ thống các phương trình ta có kết quả :

Đáp số : $(2,4,8,12),\left(\frac{25}{2},\frac{15}{2},\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$

Bài 23. Tổng của số hạng thứ hai và thứ tư của một cấp số nhân tăng nghiêm ngặt là 30 , và tích của chúng bằng 144. Tìm tổng mười số hạng đầu tiên của dãy số đó ?

HƯỚNG DẪN

Gọi cấp số nhân tăng nghiêm ngặt là : a_n. Theo đầu bài ta có a_2,a_4 là hai nghiệm của phương trình :

$$t^2-30t+144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=6\\t=24\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_2=6\\a_4=24\end{cases}\\\begin{cases}a_2=24\\a_4=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_1q=6\\a_1q^3=24\end{cases}\\\begin{cases}a_1q=24\\a_1q^3=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_1q=6\\q^2=4\end{cases}\\\begin{cases}a_1q=24\\q^2=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_1=\dfrac{6}{\pm2}\\q=\pm2\end{cases}\\\begin{cases}a_1=24.(\pm2)\\q=\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Do cấp số nhân tăng nghiêm ngặt , cho nên q>1 , do vậy ta chọn $a_1 = 3, q = 2$

Cho nên : $S_{10} = u_1 \frac{2^{10}-1}{2-1} = 3.(1024-1) = 3069$

Bài 24. Cho tam giác ABC có $A = 90^0$ còn a,b,$\frac{\sqrt{6}}{3}$,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân . Tam giác ABC là tam giác có đặc điểm gì ?

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết ta có hệ : $\begin{cases} A = 90^0 \\ \because a, b, \frac{\sqrt{6}}{3}, c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ \frac{2}{3}b^2 = ac \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{2}ac \end{cases}$

Từ đó suy ra : $a^2 = \frac{3}{2}ac + c^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 3ac + 2c^2 \Leftrightarrow (2a+c)(a-2c) = 0 \Rightarrow a = 2c\left(2a+c>0\right)$

Mà : $\cos B = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^0, C = 30^0$. Vậy tam giác ABC là tam giác nửa đều .

Bài 25. Cho tam giác ABC, có ba cạnh a,b,c , theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng . Hãy chứng minh rằng : $\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2} = 3$.

HƯỚNG DẪN

Nếu ba cạnh a,b,c lập thành cấp số cộng thì ta có : a+c=2b

$\Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B \Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} (1)$

Vì : $A + C = 180^0 - B \Rightarrow \frac{A+C}{2} = 90^0 - \frac{B}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{A+C}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2} \\ \cos\frac{A+C}{2} = \cos\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = \sin\frac{B}{2} \end{array}\right. (*)$

Do đó (1) trở thành :

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3(dpcm)$$

Bài 26. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện : tagA.tangB=6 và tangA.tangC=3 . Hãy chứng tỏ : tangA,tgB,tgC theo thứ tự dó lập thành cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

Từ giả thiết ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \tan A \tan B = 6 \\ \tan A \tan C = 3 \end{cases}$

Mặt khác ta cũng có : $-\tan B = \tan(A+C) = \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = \frac{\tan A + \tan C}{1-3} = -\frac{1}{2}(\tan A + \tan C)$

$\Leftrightarrow 2\tan B = \tan A + \tan C \Leftrightarrow 2\tan A \tan B = 2\tan^2 A + \tan A \tan C \Leftrightarrow 2.6 = 2\tan^2 A + 3 \Rightarrow \tan^2 A = 9$

Theo giả thiết : tanAtanB=6>0,tanAtanC=3>0 cho nên tanA>0,tanB>0,tanC>0

Suy ra : tanA=3 ,tanB=2 và tanC=1 . Điều đó chứng tỏ tanA,tanB,tanC lập thành cấp số cộng có công sai d=1.

Bài 26'. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện : tagA,tangB,tangC theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của góc B có thể có được ?

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết : tanA,tanB,tanC lập thành cấp số cộng thì ta có : tanA+tanC=2tanB

$\Leftrightarrow \tan A+\tan C=\dfrac{\sin(A+C)}{\cos A.\cos C}=\dfrac{\sin B}{\cos A.\cos C}\Rightarrow \dfrac{2\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin B}{\cos A.\cos C}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\cos B}=\dfrac{1}{\cos A.\cos C}\Leftrightarrow 2\cos A.\cos C=\cos B\Leftrightarrow \cos(A+C)+\cos(A-C)=\cos B$

$\Leftrightarrow -\cos B+\cos(A-C)=\cos B\Leftrightarrow \cos B=\dfrac{1}{2}\cos(A-C)\le\dfrac{1}{2}$ (2)(vì $0<\cos(A-C)\le 1$)

Do $0<B\le\pi\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của B $=\dfrac{\pi}{3}$

Bài 27. Tam giác ABC có : $\cot\dfrac{A}{2},\cot\dfrac{B}{2},\cot\dfrac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng . Hãy chứng minh rằng ba cạnh a,b,c theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

Theo đầu bài ta có : $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=2\cot\dfrac{B}{2}\Leftrightarrow \dfrac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=2\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=2\dfrac{\sin\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{A+C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A+C}{2}\right)=2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A+C}{2}=\left(\cos\dfrac{A-C}{2}-\cos\dfrac{A+C}{2}\right)\sin\dfrac{A+C}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{A+C}{2}\Leftrightarrow 2\sin(A+C)=\dfrac{1}{2}(\sin A+\sin C)$

$\Leftrightarrow \sin A+\sin C=2\sin B\Rightarrow a+c=2b$. Chứng tỏ ba cạnh của tam giác lập thành cấp số cộng

Bài 28. Tam giác ABC có : $\cot A,\cot B,\cot C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp cộng . Hãy chứng minh rằng : a^2,b^2,c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng ?

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết ta có : cotA+cotC=2cotB

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\dfrac{2\cos B}{\sin B}\Leftrightarrow \sin^2 B=2\sin B\sin C\cos B=\left[\cos(A-C)-\cos(A+C)\right]\cos B$

$\Leftrightarrow \sin^2 B=\cos(A-C)\cos B-\cos(A+C)\cos B=-\cos(A-C)\cos(A+C)+\cos^2 B$

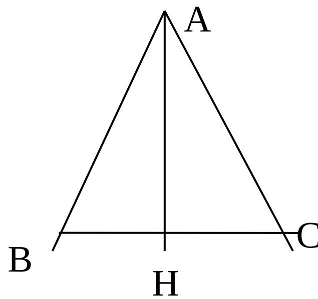
$\Leftrightarrow \sin^2 B=-\dfrac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2C)+1-\sin^2 B=-\dfrac{1}{2}\left(1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 C\right)+1-\sin^2 B$

$\Rightarrow 2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C\Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$

Vậy chứng tỏ a^2,b^2,c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài 29. Cho tam giác ABC cân (AB=AC), có cạnh đáy BC , đường cao AH , cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân . Hãy tính công bội q của cấp số nhân đó ?

HƯỚNG DẪN



Theo giả thiết : AB=AC, BC,AH,AB lập thành cấp số cộng cho nên ta có hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q}=\dfrac{BC}{AH}=\dfrac{2HC}{AH}=2\cot C \\ \dfrac{1}{q}=\dfrac{AH}{AB}=\sin B \end{cases}$$

. Cho nên từ đó ta có kết quả sau : 2cotC=sinC , hay : $2\cos C=\sin^2 C=1-\cos^2 C$

$\Leftrightarrow \cos^2 C+2\cos C-1=0 \Leftrightarrow \cos C=-1+\sqrt{2}\left(0<C<90^0\right)$

Do C là nhọn cho nên $\sin C=\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$

Cho nên công bội của cấp số nhân là : $q=\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$

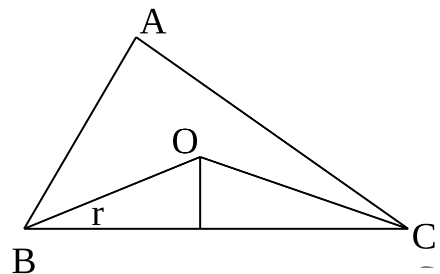
Bài 30. Tam giác ABC có các cạnh a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng . Hãy chứng minh rằng khi đó công sai của cấp số cộng được tính bởi công thức :

$$d=\frac{3}{2}r\left(tg\frac{C}{2}-tg\frac{A}{2}\right)$$

HƯỚNG DẪN

Theo giả thiết : a,b,c lập thành cấp số cộng ,

cho nên công sai d=$\dfrac{c-a}{2}$ (1)



Ta có : $a=r\cot\dfrac{B}{2}+r\cot\dfrac{C}{2}=r\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$

Tương tự : $c=r\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{A}{2}\right)$

Thay vào (1) ta có :

$d=\dfrac{1}{2}r\left(\cot\dfrac{A}{2}-\cot\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}-\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}r\left(\dfrac{\tan\dfrac{C}{2}-\tan\dfrac{A}{2}}{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}}\right)(2)$ Mặt khác theo bài 25 thì

$\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{C}{2}=3\Rightarrow \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$. Thay vào (2) ta có :

$\Leftrightarrow d=\dfrac{1}{2}r\dfrac{\tan\dfrac{C}{2}-\tan\dfrac{A}{2}}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}r\left(\tan\dfrac{C}{2}-\tan\dfrac{A}{2}\right)$. (Điều phải chứng minh)